Cálculo II

PS3 - Tópicos de solução (alíneas não resolvidas na aula)

I) Seja h uma função real, definida em $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3+x^2.\sin x}{x^2+y^2} \text{ para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c) Mostre que h **não** é diferenciável em $(0,0)$.

Para h ser diferenciável em $(0,0)$ deveríamos ser capazes de aproximar a função através de um plano tangente no ponto em questão, i.e. escrever h da seguinte forma,

$$h(x,y) = h(0,0) + h'_x(0,0).x + h'_y(0,0).y + o(\rho) \text{ e } \lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0.$$

Assim, para provar que h não é diferenciável na origem basta que o limite não exista ou a existir seja diferente de zero.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + x^2.\sin x - (x+y)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Calculando o limite direcional, segundo a direcção $y = x$,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=x}} \frac{x^3 + x^2.\sin x - (x+x)\left(x^2+x^2\right)}{\left(x^2+x^2\right)^{3/2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2.\sin x - 3x^3}{2^{3/2}\left|x\right|^3}, \text{ quando } x \longrightarrow 0 \text{ por valores positivos temos,} \\ \frac{1}{2^{3/2}}\left[\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} - 3\right] &= -\frac{2}{2^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, o limite em questão se existir será $-\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, donde se conclui a não diferenciabilidade de h na origem. Note-se que o limite poderá nem existir, mas caso exista nunca será zero uma vez que segundo a direcção $y = x$ o limite é $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e pelo teorema da unicidade do limite podemos dizer que o limite a existir será $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Determine $h'_{(1,2)}(0,0)$.

$$h'_{(1,2)}(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{h((0,0)+h(1,2)) - h(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(2h)^3 + h^2.senh}{h\left(h^2+4h^2\right)} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{8h + senh}{5h} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{5}.$$

II) Considere a seguinte função:

$$g\left(x,y\right)=\begin{cases} f\left(x,y\right)=\sqrt{x.\left(y-1\right)^{2}} \text{ para } (x,y)\in D_f \\ 0 \text{ para } (x,y)\notin D_f \end{cases}$$

em que D_f designa o domínio da função f.

c) Mostre que g é uma função diferenciável em $(0,1)$.

Para g ser diferenciável em $(0,1)$ deveremos ser capazes de aproximar a função através de um plano tangente no ponto em questão, i.e. escrever g da seguinte forma,

$$g\left(x,y\right)=g\left(0,1\right)+g_x'\left(0,1\right).x+g_y'\left(0,1\right).\left(y-1\right)+o\left(\rho\right) \text{ e } \lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\rho\right)}{\rho}=0.$$

Assim, para provar que g é diferenciável em $(0,1)$ teremos que verificar se o resto sobre a norma tende para zero quando $(x,y)\longrightarrow(0,1)$. Dado que as derivadas parciais, calculadas em b), são ambas nulas, então o limite a calcular fica simplesmente:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o\left(\rho\right)}{\rho}=\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,1)}\frac{\sqrt{x.\left(y-1\right)^{2}}}{\sqrt{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}}.$$

Para provar que o limite em questão é zero teremos que ir necessariamente pela definição de limite no ponto $(0,1)$.

$$\forall\delta>0,\exists\epsilon>0:0<\|(x,y-1)\|<\epsilon\Longrightarrow\left|\sqrt{\frac{x.\left(y-1\right)^{2}}{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}}-0\right|<\delta$$

Majorando,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\frac{x.\left(y-1\right)^{2}}{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}}\right| &\leq \sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}.\left(x^{2}+\left(y-1\right)^{2}\right)}{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}}\leq\sqrt{\left(x^{2}+\left(y-1\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}-1}}= \\ &= \left(\sqrt{\left(x^{2}+\left(y-1\right)^{2}\right)}\right)^{1/2}<\sqrt{\epsilon}<\delta\Longleftrightarrow\epsilon<\delta^{2}\end{aligned}$$

d) Determine $g'_{(u_1,u_2)}\left(0,1\right)$, com (u_1,u_2) um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$.

Tendo em conta que foi provada a diferenciabilidade de g no ponto $(0,1)$ então podemos utilizar a seguinte fórmula para cálculo da derivada direcional segundo o vector não nulo (u_1,u_2):

$$g'_{(u_1,u_2)}\left(0,1\right)=\nabla g\left(0,1\right).\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=0.u_1+0.u_2=0.$$