Cálculo II

PS7 - Tópicos de solução - Turmas 23 e 24; 28 e 29.

I) Seja a função $g(u,v) = (u^3, -v^3 + u)$.
a) Mostre que g tem inversa global, g^{-1}.
Basta resolver o sistema em ordem a u e v (inversão explícita):

$$\begin{cases} x = u^3 \\ y = -v^3 + u \end{cases} \iff \begin{cases} u = x^{\frac{1}{3}} \\ v = \left(x^{\frac{1}{3}} - y\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}.$$

b) Mostre, usando o Teorema da Função Inversa, que g tem inversa local em $(u,v) = (1,1)$. Calcule $g^{-1}(g(1,1))$.

Para aplicar o **T. Fc. Inversa** é necessário verificar que *i)* g é de classe C^1 na vizinhança do ponto $(1,1)$, o que se verifica pois cada uma das suas componentes é C^1 (funções polinominais) em todo o seu domínio; *ii)* $|Jg\,(1,1)| \neq 0$. Verificando o requisito *ii)*,

$$|Jg\,(1,1)| = \left|\begin{array}{cc} 3u^2 & 0 \\ 1 & -3v^2 \end{array}\right|_{(1,1)} = \left|\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 1 & -3 \end{array}\right| = -9 \neq 0.$$

$$g^{-1}(g(1,1)) = g^{-1}\left(1^3, -1^3 + 1\right) = g^{-1}\,(1,0) = \left(1^{\frac{1}{3}}, \left(1^{\frac{1}{3}} - 0\right)^{\frac{1}{3}}\right) = (1,1).$$

Aqui pede-se o cálculo explícito, no entanto, note que este resultado é garantido directamente pelo Teorema da Fc. Inversa para a vizinhança do ponto em questão.

c) Calcule explicitamente $g(g^{-1}(x,y))$ (Use a expressão de g fornecida e a expressão de g^{-1} obtida na alínea (a).)

$$g(g^{-1}(x,y)) = g\left(x^{\frac{1}{3}}, \left(x^{\frac{1}{3}} - y\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3, -\left(\left(x^{\frac{1}{3}} - y\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 + x^{\frac{1}{3}}\right) =$$

(x,y)

II) Considere a função $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F\,(x,y,z) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - z^2.$$

a) Quais os pontos da superfície de nível $F^{-1}\,(0)$ em que o Teorema da Função Implícita não garante a existência de uma vizinhança na qual o conjunto é da forma $z = f\,(x,y)$?

$F^{-1}\,(0)$ é referente a $\left(x^2 + y^2\right)^2 - z^2 = 0$, conjunto de pontos (x,y,z) do domínio de F cuja imagem é zero.

Será então que podemos definir implicitamente uma função $z = f\,(x,y)$ a partir de $\left(x^2 + y^2\right)^2 - z^2 = 0$?

Para podermos aplicar o teorema da Fc. Implícita temos de verificar 3 requisitos: *i)* F ser função de classe C^1 num domínio aberto (o que se verifica, pois trata-se de uma composta de uma potência após polinómio subtraindo outro polinómio); *ii)* os pontos em análise têm de satisfazer a equação $\left(x^2+y^2\right)^2 - z^2 = 0$; *iii)* $\left|J_z^F(x,y,z)\right| \neq 0$.

Resolvendo o sistema

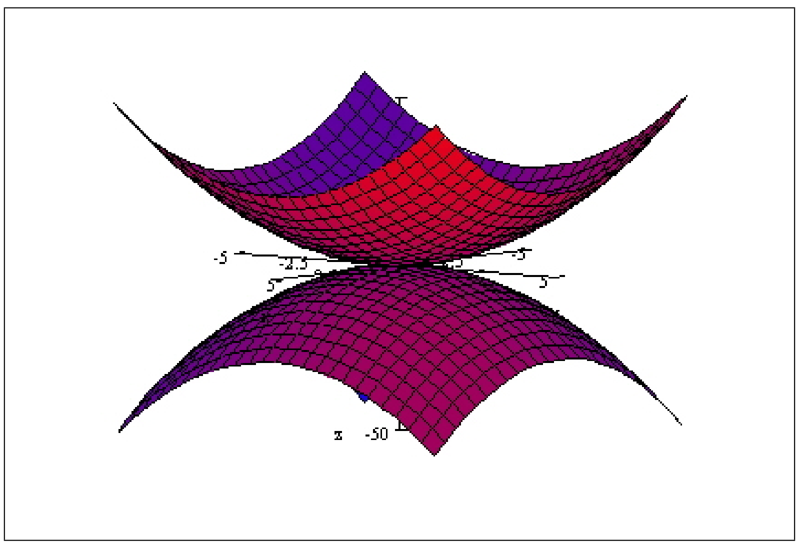
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2z = 0 \\ \left(x^2+y^2\right)^2 - z^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$$

Logo, o T. Fc. Implícita não garante a existência de uma vizinhança na origem na qual o conjunto é da forma $z = f(x,y)$.

b) Esboce a superfície de nível $F^{-1}(0)$.

Representar graficamente o conjunto de pontos num espaço tridimensional (x,y,z) tal que

$$\begin{aligned} \left(x^2+y^2\right)^2 - z^2 &= 0 \Longleftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 = z^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2 = |z| \\ &\Longleftrightarrow z = x^2+y^2 \vee z = -\left(x^2+y^2\right) \end{aligned}$$



c) Seja f a função cujo gráfico descreve $F^{-1}(0)$ numa vizinhança de $(1,0,1)$. Calcule $J_f(1,0)$.

Aplicando o T. Fc. Implícita ao ponto $(x,y,z) = (1,0,1)$,

$$\begin{aligned} J_{x,y}^f(1,0) &= -\left(J_z^F(1,0,1)\right)^{-1} . J_{x,y}^F(1,0,1) = \left[-\frac{1}{-2z} . \begin{bmatrix} 4x\left(x^2+y^2\right) & 4y\left(x^2+y^2\right) \end{bmatrix} \right]_{(1,0,1)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4x\left(x^2+y^2\right)}{2z} & \frac{4y\left(x^2+y^2\right)}{2z} \end{bmatrix}_{(1,0,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$