Cálculo II

PS8 - Tópicos de solução - Turmas 23 e 24; 28 e 29.
(entrega 30/ 04/ 2008)

1. Considere a função $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \int\limits_{x}^{xy} \varphi(t)dt$

a) Mostre que o ponto $(0,1)$ é ponto de estacionaridade da função g.

A função pode ser escrita da seguinte forma $g(x,y) = F(xy) - F(x)$, em que $F(xy)$ é a função primitiva de $\varphi(t)$ após a função xy e $F(x)$ é a primitiva de $\varphi(t)$ após x.

Verifiquemos se o ponto $(0,1)$ satisfaz, de facto, as CPO:

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \left.\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right|_{u=xy} .y - \left.\frac{\partial F(v)}{\partial v}\right|_{v=x} = \varphi(xy)\, y - \varphi(x) \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \left.\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right|_{u=xy} .x = \varphi(xy)\, .x \end{cases}$$, aplicando no ponto em questão,

$$\begin{cases} \frac{\partial g(0,1)}{\partial x} = \frac{\partial F(0)}{\partial u}.1 - \frac{\partial F(0)}{\partial v} = \varphi(0) - \varphi(0) = 1 - 1 = 0 \\ \frac{\partial g(0,1)}{\partial y} = \frac{\partial F(0)}{\partial u}.0 = \varphi(0).0 = 1 \times 0 = 0 \end{cases}$$, logo $(0,1)$ é ponto de estacionaridade pois satisfaz as CPO.

b) Calcule a matriz Hessiana da função g no ponto $(0,1)$.

Calculando as segundas derivadas de $g(x,y)$,

$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} = \varphi'(xy)\, y^2 - \varphi'(x) \Longrightarrow \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x^2} = \varphi'(0)\, 1^2 - \varphi'(0) = 0$

$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} = \varphi'(xy)\, xy + \varphi(xy) \Longrightarrow \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial x \partial y} = \varphi'(0)\, 0 + \varphi(0) = 1$

$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = \varphi'(xy)\, x^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2 g(0,1)}{\partial y^2} = \varphi'(0)\, 0^2 = 0$

Concluindo,

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Será $(0,1)$ um ponto extremante de g? Classifique o ponto em causa.

Resolvendo o polinómio característico (método dos valores próprios),

$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$. Logo, a Hessiana é indefinida no ponto $(0,1)$ o que implica que este seja *ponto de sela.*