Faculdade de Economia
Universidade Nova de Lisboa
2º Semestre 2007 / 2008

Cálculo II

- Aulas Práticas –

Versão 22/02/2008

0. Espaço $\Re^n$

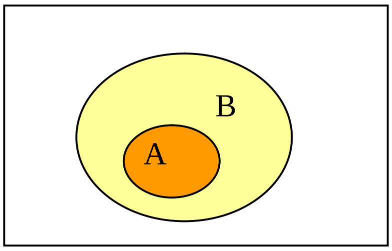
- Revisões de lógica (noções básicas)

<u>Definição</u>: Uma ***proposição*** é uma afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.

<u>Definição</u>: A proposição A implica a proposição B (simbolicamente, $A \Rightarrow B$) se B for verdadeira sempre que A o seja.[1]

Diagrama de Venn (intuição gráfica da definição anterior):

Ω - Universo



No diagrama:

$A \subset B$, logo $A \Rightarrow B$.

<u>Definição</u>: Se A e B forem proposições tais que $A \Rightarrow B$ e também $B \Rightarrow A$, então A é ***equivalente*** a B (simbolicamente $A \Leftrightarrow B$).

<u>Resultado</u>: $A \Rightarrow B$ se e só se $\sim B \Rightarrow \sim A$ (reproduzir o resultado num diagrama de Venn para obter a intuição gráfica).

<u>Definição</u>: B é condição necessária para A se $A \Rightarrow B$.

<u>Definição</u>: A é condição suficiente para B se $A \Rightarrow B$.

Operadores lógicos:
$\vee$: significa "ou", $A \vee B$ é verdadeira. i.e., "A ou B" é verdadeira, se A ou B forem verdadeiras, ou ambas.
$\wedge$: significa "e", $A \wedge B$ é verdadeira, i.e., "A e B" é verdadeira, se quer A quer B forem verdadeiras.

<u>Resultados</u>: $\sim (A \vee B)$ é verdadeira se e só se $\sim A \wedge \sim B$ for verdadeira.
$\sim (A \wedge B)$ é verdadeira se e só se $\sim A \vee \sim B$ for verdadeira.

A	**B**	**A $\wedge$ B**	**A $\vee$ B**	**A $\Rightarrow$ B**	**A $\Leftrightarrow$ B**	**~B $\Rightarrow$ ~A**	**~A $\vee$ B**
F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V	V

[1] Note-se que **"Se *A* então *B*"** só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente falso. Isto significa que a condição continua a ser verdadeira se o consequente for verdadeiro e o antecedente falso.

- Noção de norma e distância. Breves noções topológicas em $\Re^n$.

Definição: A ***norma*** de um vector x designa-se por $\| x \|$ e possui as seguintes **propriedades**:

i) $\| x \| > 0 \;\; se \;\; x \neq 0, \;\; e \;\; \| x \| = 0 \;\; se \;\; x = 0$
ii) $\| \lambda x \| = | \lambda | . \| x \|, \;\; \lambda \in \Re$;
iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(desigualdade triangular).*

Definição: Uma função $d : X \times X \to [0;\infty)$ é uma ***distância*** (***métrica***) se possuir as seguintes **propriedades**:

i) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) > 0 \;\; se\, x \neq y \;\; e \;\; d(x,y) = 0 \;\; se \;\; x = y$
ii) $\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$ *(reflexibilidade)*
iii) $\forall x, y, z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ *(desigualdade triangular).*

Assim, um espaço munido de uma distância (métrica) chama-se ***espaço métrico***.

Teoria dos Conjuntos (definições)

Definição: Um ***conjunto*** é uma colecção de elementos.

Definição: Conjunto *A está **contido** em B* (i.e. $A \subset B$) se $x \in A \Rightarrow x \in B, \;\; \forall x$.

Definição: A ***intersecção*** *dos conjuntos A e B* (i.e. $A \cap B$) é o conjunto: $\{x : x \in A \; e \; x \in B\}$.

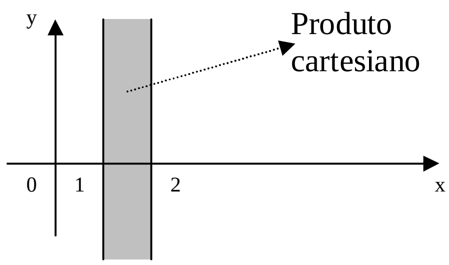
Definição: A ***reunião*** *dos conjuntos A e B* (i.e. $A \cup B$) é o conjunto: $\{x : x \in A \; ou \; x \in B\}$.

Definição: Conjunto **complementar** de *B* (i.e. *A* \ *B ou A - B*) relativamente a *A* é o conjunto: $\{x : x \in A \; e \; x \notin B\}$.

Nota: Se $A = \Omega$, então o complementar do conjunto *B* relativamente a *A* é $\Omega \setminus B$, também denotado por $\overline{B}$.

Definição: O **produto cartesiano** dos conjuntos *A* e *B* (i.e. $A \times B$) é o conjunto: $\{(x,y) : x \in A \; e \; y \in B\}$.

Exemplo 1: $A = \{x \in \Re : 1 \leq x \leq 2\}$ e $B = \{y \in \Re\}$
(gráfico)



***Exemplo 2*: descrição extensiva**

$A = \{branco, preto, amarelo\}$
$B = \{caneta, lápis, borracha\}$

Logo,

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (branco, caneta); (branco, lápis); (branco, borracha); (preto, caneta); (preto, lápis); \\ (preto, borracha); (amarelo, caneta); (amarelo, lápis); (amarelo, borracha) \end{matrix} \right\}$$

<u>Def.</u>: O número real ***b*** é um ***<u>majorante</u>*** do conjunto *S sse* qualquer elemento de *S* for menor ou igual que ***b*** ($\forall x \in S, x \leq b$). ***S diz-se majorado*** *sse* possuir **majorante.**

<u>Nota</u>: Se considerarmos o caso de um intervalo ilimitado à direita, então este conjunto não tem majorante. Neste caso escrevemos: majorante = $\{\emptyset\}$ = conjunto vazio.

<u>Def.</u>: O número real ***b*** é um ***<u>minorante</u>*** do conjunto *S sse* qualquer elemento de *S* for maior ou igual que ***b*** ($\forall x \in S, x \geq b$). ***S diz-se minorado*** *sse* possuir **minorante**.

- *S* diz-se *limitado* se for majorado e minorado.

<u>Def</u>.: O ***Máximo*** de um conjunto $S \subseteq \Re$ é o elemento pertencente a *S* que é majorante.

Exemplos: $S = [0;1] \rightarrow \max S = 1$
$S = [0;1[\rightarrow \max S = \emptyset$ (não existe máximo).

<u>Def</u>.: O ***Mínimo*** de um conjunto $S \subseteq \Re$ é o elemento pertencente a *S* que é minorante.

<u>Def</u>.: O ***Supremo*** de um conjunto $S \subseteq \Re$ (i.e. ***Sup S***) é o menor dos seus majorantes.

<u>Nota</u>: *Sup S* = s
1) $\forall x \in S, x \leq s$;
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x \geq s - \varepsilon$.

Def.: O ***Ínfimo*** de um conjunto $S \subseteq \Re$ (i.e. ***Inf S***) é o maior dos seus minorantes.

<u>Def</u>.: Bola aberta de centro ***c*** e raio ***r*** é o conjunto:

$$B_r(c) = \{x : d(x,c) < r\} = \{x : |x - c| < r\}$$

<u>Def</u>.: ***<u>Vizinhança</u>*** no ponto ***c*** é qualquer subconjunto de $\Re$ que contenha uma bola de centro ***c***.

<u>Def</u>.: O ponto ***a*** é um ***<u>ponto interior</u>*** de *S* se existir alguma bola de centro ***a* contida em *S*,** i.e. $\exists r > 0 : B_r(a) \subset S$.

<u>Def</u>.: O ponto ***a*** é um ***<u>ponto exterior</u>*** de *S* se for um ponto interior do complementar de *S*, i.e. $\exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \emptyset$.

<u>Def</u>.: O ponto ***a*** é ***<u>ponto fronteiro</u>*** de *S* se não for interior nem exterior, isto é, qualquer bola de centro ***a*** tem pontos comuns com *S* e com o complementar de *S*: [C(S)].

Analiticamente, $\forall r > 0,\ B_r(a) \cap S \neq \emptyset \ \wedge B_r(a) \cap C(S) \neq \emptyset$

<u>Def</u>.: ***Interior de S*** é o conjunto formado por todos os pontos interiores de *S*: ***Int S***.

<u>Def</u>.: ***Exterior de S*** é o conjunto formado por todos os pontos exteriores de *S*: ***Ext S***.

<u>Def</u>.: ***Fronteira de S*** é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de *S*: ***Fr S***.

<u>Def</u>.: ***Fecho ou aderência de S*** é a reunião de S com a fronteira de S: $\overline{S} = S \cup Fr\, S$.

Ponto aderente é o ponto que pertence ao **fecho** de um conjunto.

O conjunto ***S diz-se aberto*** se coincidir com o seu ***interior***, i.e., *S = int S*
O conjunto ***S diz-se fechado*** se coincidir com o seu ***fecho***, i.e., $S = \overline{S} = S \cup Fr\, S$.

<u>Def</u>.: um ponto ***a*** é ponto de ***acumulação*** de *S*, se toda a bola de centro ***a*** contém pelo menos um ponto de *S* distinto de ***a***.

Analiticamente, $\forall r > 0,\ B_r(a) \cap \left(S - \{a\}\right) \neq \emptyset$.

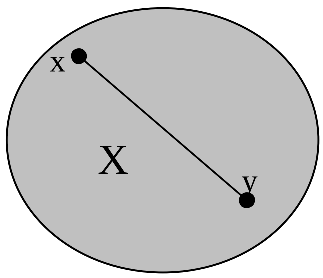
<u>Def</u>.: ***Conjunto derivado* de *S*** é o conjunto dos pontos de acumulação de *S*.

Um ponto ***a*** pertencente a *S* é um ***ponto isolado*** se existir alguma bola de centro ***a*** que só tenha em comum com *S* o próprio elemento ***a***, i.e. $\exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \{a\}$.

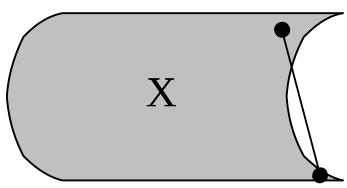
<u>Def</u>.: ***Conjunto*** *S* é ***limitado*** se $\exists b \in \Re : \| x \| \leq b,\ \forall x \in S$. Intuitivamente podemos dizer que *S* é limitado se conseguirmos determinar uma vizinhança que contenha todo o espaço *S*.

- X é um conjunto ***<u>Convexo</u>*** *sse* $\forall x, y \in X$ *então* $\lambda.x + (1-\lambda).y \in X$, *para* $\lambda \in [0;1]$
- X é um conjunto ***<u>Conexo</u>*** se conseguirmos unir qualquer par de pontos pertencentes ao espaço X através de uma linha/curva toda ela contida no conjunto em questão. Um conjunto é *conexo*, se não for *desconexo*. Um conjunto *S* é ***desconexo*** se: $\exists A, B : S = A \cup B \wedge \overline{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exemplos:



Conjunto **convexo** – a definição verifica-se para qualquer par de pontos (x,y) no espaço X, e qualquer valor de $\lambda \in [0;1]$.



Conjunto **conexo**, mas **não convexo** – para certos valores de λ obtemos pontos fora do espaço X.

1. Funções de $\Re^n$ em $\Re^m$

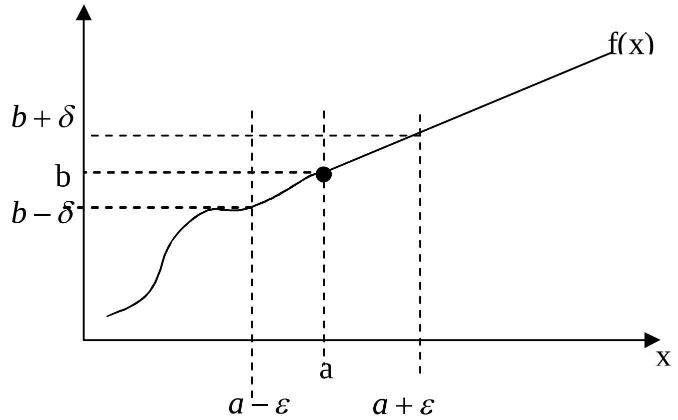
- Limite de uma função

Definição:(limite de uma função)

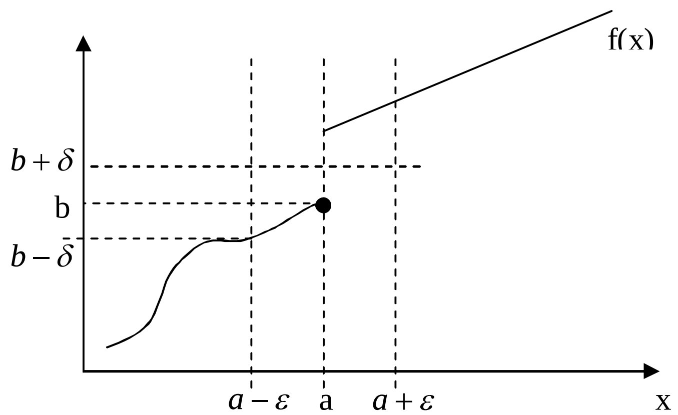
Seja, $f : D \subseteq \Re^n \to \Re^m$

$\lim_{x \to a} f(x) = b$, sse, $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon(\delta) > 0 : \| x - a \| < \varepsilon \Rightarrow \| f(x) - b \| < \delta$

Intuição gráfica,



Caso em que a definição falha (**função descontínua**)



É claro que a definição não vai ser respeitada! Para δ suficientemente pequenos não conseguimos encontrar nenhum ε tal que $\| x - a \| < \varepsilon \Rightarrow \| f(x) - b \| < \delta$.

Nota:
Desigualdade de **Cauchy-Schwarz:** $\| v.w \| \leq \| v \| . \| w \|$
Desigualdade **triangular**: $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$.

- Continuidade

Seja ***a*** **ponto de acumulação** do domínio (*D*) da função $f : D \subseteq \Re^n \to \Re^m$. Então a função é contínua no ponto *a* se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A função *f* é contínua no ponto *a* se: $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \| x - a \| < \varepsilon \Rightarrow \| f(x) - f(a) \| < \delta$ e $x \in D$.

Note-se que **em *pontos isolados* a função é contínua**.

A função é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Algumas **propriedades** das funções contínuas:

- $f : \Re^n \to \Re^m$ $(m > 1)$é contínua num ponto ***a***, *sse* as funções coordenadas $f_1 : \Re^n \to \Re$, $f_2 : \Re^n \to \Re$,… $f_m : \Re^n \to \Re$ forem contínuas no ponto ***a***.
- O **quociente**, **produto**, **soma** / **subtracção** de funções contínuas é uma função contínua no seu domínio.
- Função composta $f o g$ é contínua em ***a*** se ***g*** for contínua em ***a*** e ***f*** for contínua em ***g(a)***.

2. Derivação em $\Re^n$

- Derivadas Parciais

Def.: Seja $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ um ponto interior do domínio da função $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$. Chama-se ***derivada parcial no ponto a*** em relação a $\boldsymbol{x_i}$, ao limite (quando existe):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1,...,a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_{i-1}, a_i, a_{i+1},...,a_n)}{h},$$ e costuma designar-se por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), f'_{x_i}(a), (D_{x_i} f)(a)$.

Def.: **Gradiente da função (∇f)** no ponto ***a*** é dado por:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \frac{\partial f}{\partial x_3}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a), \right).$$

Considere agora uma **função vectorial**: $f : \Re^n \to \Re^m$.
$f = (f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n))$, neste caso para obtermos todas as suas derivas parciais (no ponto ***a***), temos de derivar a ***matriz Jacobiana***, i.e.:

$$J = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ ... \\ \nabla f_m(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Nota: ***J*** só será uma matriz quadrada se $m = n$.
$|J|$ representa o ***determinante*** da matriz Jacobiana (rever Álgebra linear, conceito de determinante).

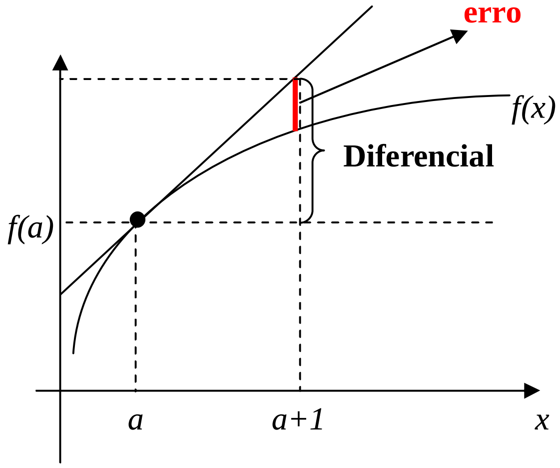
- Diferenciabilidade

<u>Def</u>.: Considere $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ e seja ***a*** um ponto interior do domínio de ***f***.

f é diferenciável em ***a*** quando nalguma vizinhança do ponto ***a*** a função se pode representar como:

$f(x) = f(a) + f'_{x_1}(a).(x_1 - a_1) + f'_{x_{21}}(a).(x_2 - a_2) + ... + f'_{x_{n1}}(a).(x_n - a_n) + \sigma(\| x - a \|)$,

onde, $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\sigma(\rho)}{\rho} = 0$; $\rho = \| x - a \|$.



$$f(x) = f(a) + \nabla f(a).(x - a) + \underbrace{\sigma(\rho)}_{\mathrm{Re}\,sto}$$

Caso de $f : D \subseteq \Re \to \Re$

$$f(x) = f(a) + f'_x(a).(x - a) + \underbrace{\sigma(\rho)}_{\mathrm{Re}\,sto}$$

Caso de $f : D \subseteq \Re^n \to \Re^m$

$$\underbrace{f(x)}_{m\times 1} = \underbrace{f(a)}_{m\times 1} + \underbrace{J_a}_{m\times n}.\underbrace{(x - a)}_{n\times 1} + \underbrace{\sigma(\rho)}_{m\times 1}$$

Representando matricialmente:

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \cdots \\ f_m(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ \cdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1(\rho) \\ \sigma_2(\rho) \\ \cdots \\ \sigma_m(\rho) \end{bmatrix}.$$

<u>Teorema</u>: Função vectorial $f : D \subseteq \Re^n \to \Re^m$ é diferenciável em ***a*** *sse* cada uma das componentes for diferenciável em ***a.***

Notas:

- As derivadas de ordem ***r*** da função *f* são contínuas *sse* a função é de classe C^r.
- Se *f* é C^r, as derivadas de ordem ***r***, tal que derivadas o mesmo nº de vezes em ordem a cada variável, são iguais.
- *f* é C^r em *S* se admite derivadas parciais contínuas até à ordem *r*, em todos os pontos de *S*.

<u>Teorema</u>: Se $\exists$ derivadas parciais de 1ª ordem no ponto ***a***, e se ***(n-1)*** dessas derivadas forem contínuas no ponto ***a***, então a função é diferenciável no ponto.

- Derivada Direccional

- $f'_{(u_1,u_2)}(a,b) = J_f(a,b).u$, em que u é um vector coluna.

- $\frac{df}{dx}$: derivada dirigida segundo o vector (1; 0).

- **Propriedades** do **vector gradiente**:

  - Seja $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ uma função diferenciável no ponto ***a***. A derivada dirigida da função ***f*** no ponto ***a*** atinge o seu maior valor na direcção do vector gradiente. $u = \frac{\nabla f}{\| \nabla f \|}$.

  Prova: $f'_u(a) = \nabla f(a).u = \|\nabla f(a)\|.\|u\|.\cos\theta$, em que θ é o ângulo formado pelo vector gradiente e o vector ***u***. Assim, $f'_u(a)$ atinge o valor máximo quando $\cos\theta = 1$, ou seja, $\theta = 0$, o que implica que ***u*** tem a mesma direcção e sentido que o vector gradiente, i.e., $\frac{u}{\|u\|} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

  - Direcção em que a função não varia (ao longo de cada curva de nível) é aquela em que ***u*** é perpendicular ao vector gradiente. O vector gradiente é perpendicular às curvas de nível. – Ver pg. 60, Cesaltina Pires, "*Cálculo para Economistas*".

  Prova: $f'_u(a) = \nabla f(a).u = \|\nabla f(a)\|.\|u\|.\cos\theta$. Assim, a função f não tem qualquer variação quando $\cos\theta = 0$, ou seja, $\theta = 90º$, o que implica que ***u*** tem de ser perpendicular ao vector gradiente. Assim, o vector gradiente é perpendicular às curvas de nível.

- $vers\ v = \frac{v}{\| v \|} \Leftrightarrow v = \| v \| .vers\ v$, a função do versor é transformar um vector, mantendo a sua direcção e sentido, mas normalizando o comprimento para 1.

- Equação do plano tangente e da recta normal (perpendicular) ao gráfico de uma função $D \subseteq \Re^2 \to \Re$.

Equação do **plano tangente** no ponto $(a, f(a))$: $z = f(a) + \nabla f(a).(x-a)$, em que a função ***f*** é diferenciável no ponto ***a***.

Considere o plano **α** com a seguinte forma (canónica): $ax + by + cz + d = 0$, então podemos dizer que o vector perpendicular / normal ao plano no ponto *p* é o vector $\vec{n} = (a,b,c)$, que passa no ponto *p*.

__**Prova**__: Comecemos por encontrar 3 pontos pertences ao plano **α**. Por exemplo, os pontos que intersectam cada um dos eixos.

Intersecção com o eixo *Oz: x = y = 0*. Logo, *cz = -d* $\Leftrightarrow$ *z = -d/c* $P = \left(0,0,-\frac{d}{c}\right)$

Intersecção com o eixo *Oy: x = z = 0*. Logo, *by = -d* $\Leftrightarrow$ *y = -d/b* $Q = \left(0,-\frac{d}{b},0\right)$

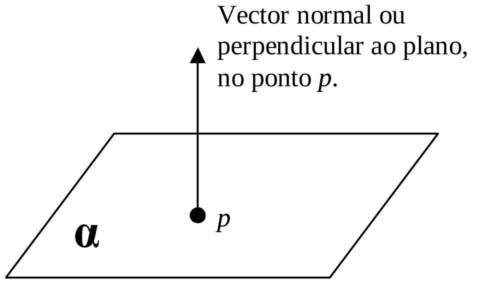
Intersecção com o eixo *Ox: y = z = 0*. Logo, *ax = -d* $\Leftrightarrow$ *x = -d/a* $R = \left(-\frac{d}{a},0,0\right)$

Vectores do plano: $\overrightarrow{PQ} = \left(0,-\frac{d}{b},\frac{d}{c}\right)$ $\overrightarrow{QR} = \left(-\frac{d}{a},\frac{d}{b},0\right)$.

$\vec{n}.\overrightarrow{PQ} = a \times 0 + b \times \left(-\frac{d}{b}\right) + c \times \frac{d}{c} = 0$ logo $\vec{u} \perp \overrightarrow{PQ}$

$\vec{n}.\overrightarrow{QR} = a \times \left(-\frac{d}{a}\right) + b \times \frac{d}{b} + c \times 0 = 0$ logo $\vec{u} \perp \overrightarrow{QR}$, ficando assim demonstrado que o vector $\vec{n} = (a,b,c)$ é perpendicular ao plano de equação $ax + by + cz + d = 0$.

Intuição gráfica:



A **recta normal** ao plano α que passa no ponto *p* será: $\frac{x - p_1}{a} = \frac{y - p_2}{b} = \frac{z - p_3}{c}$, em que (p_1, p_2, p_3), são as coordenadas do ponto *p*.

Recorde o racional por detrás destas igualdades na próxima secção "*Rectas no espaço*".

Rectas no espaço

Dados um ponto *A* de uma recta e um vector director *u*, a recta define-se pela equação:

$$P = A + k.u, \quad k \in \Re$$

em que *P* representa um ponto qualquer da recta.

Num referencial do espaço, a *equação vectorial* da recta que passa no ponto *A* e tem a direcção do vector *u* é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \Re.$$

A ***equação vectorial*** de uma recta definida por dois pontos *A* e *B* obtém-se através da igualdade:

$$P = A + k.\overrightarrow{AB}, \; k \in \Re$$

Por outro lado, as equações que relacionam directamente as três coordenadas de cada ponto da recta são ***equações cartesianas***. Para definir uma recta num referencial do espaço são necessárias duas equações de primeiro grau que relacionem as três coordenadas, uma vez que uma recta é uma intersecção de dois planos.

Se os vectores directores da recta não têm nenhuma coordenada nula, *i.e.* se a recta não for paralela a nenhum dos planos coordenados, as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e tem a direcção de $u = (u_1, u_2, u_3)$ obtêm-se através das igualdades:

$$\frac{x - x_A}{u_1} = \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3}.$$

Como chegar a estas igualdades?

Partindo da equação vectorial da recta: $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3), \quad k \in \Re.$

Esta pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} x = x_A + k.u_1 \\ y = y_A + k.u_2 \\ z = z_A + k.u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_A}{u_1} = k \\ \dfrac{y - y_A}{u_2} = k \\ \dfrac{z - z_A}{u_3} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_A}{u_1} = \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3} \quad \textbf{\textit{c.q.d.}}$$

Quando alguma das coordenadas de *u* é igual a zero, isto significa que a recta é paralela a um dos planos coordenados e por isso os seus pontos têm umas das coordenadas constante. Por exemplo, se $u_1 = 0$, as equações cartesianas seriam:

$$x = x_A \wedge \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3}.$$

Mais uma vez, para chegarmos a este resultado basta partirmos da equação vectorial da recta, fazer o desdobramento num sistema de 3 equações e resolver em ordem a *k*.

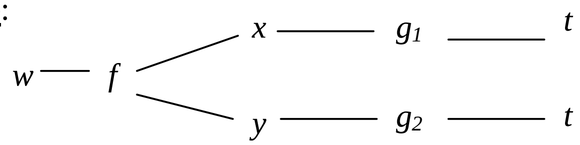
- Derivada da função composta

Matricialmente: $J_{fog}(a) = J_f\big(g(a)\big) \times J_g(a)$

Regra da cadeia:

$$\left(fog\right)'(t) = \frac{dw}{dt} = \underbrace{\frac{dw}{df}}_{=1}.\left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial g_1}.\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial g_2}.\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)$$, em que $x = g_1 \; e \; y = g_2$.

Esquema em árvore:



- Funções Homogéneas e Teorema de Euler

Definição: $f : D \subseteq \Re^n \to \Re$ é ***homogénea*** de grau $\boldsymbol{\alpha}$ se $f(t.x) = t^{\alpha}.\big(f(x)\big)\ \forall x \in D$ e $t \in \Re : t.x \in D$.

Se *t>0* a função é positivamente homogénea de grau $\boldsymbol{\alpha}$.

Definição: $f : D \subseteq \Re^n \to \Re^m$, funções vectoriais são homogéneas de grau $\boldsymbol{\alpha}$ se cada uma das suas componentes for de grau $\boldsymbol{\alpha}$ (todas as componentes têm de ter o mesmo grau).

Se *f* tem grau $\boldsymbol{\alpha}$ de homogeneidade e é diferenciável, e as suas derivadas parciais existem e são diferenciáveis, então o grau de homogeneidade das derivadas parciais de *f* é de ($\boldsymbol{\alpha}$ – 1).

Teorema de Euler: Se $f(x_1,...x_n)$ diferenciável e positiva homogénea de grau $\boldsymbol{\alpha}$, então satisfaz o seguinte **identidade**:

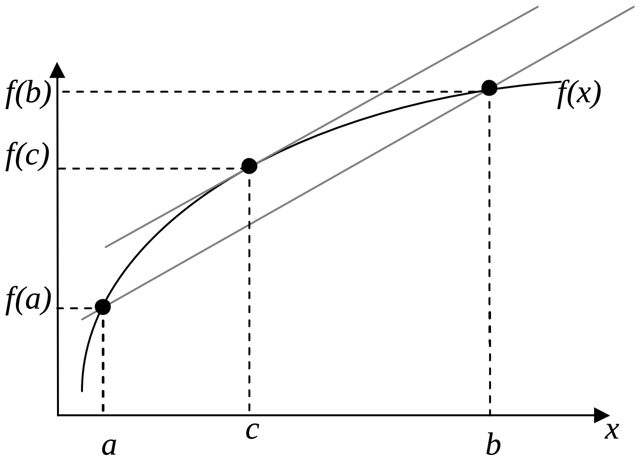
$$x_1.\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2.\frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n.\frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha.f(x_1, x_2,..., x_n)$$ e reciprocamente.

3. Fórmula de Taylor

- Teorema dos acréscimos finitos

$f:[a;b]\subseteq\Re\to\Re$, f ***contínua*** e ***diferenciável*** no interior daquele intervalo, então $\exists c\in(a,b): f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)\Leftrightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Intuição gráfica do Teorema dos Acréscimos Finitos:



Generalizando para funções vectoriais - Se $f:D\subseteq\Re^n\to\Re^m$ diferenciável, com D aberto e convexo, então dados a e b, $\exists c\in(a,b):\underbrace{f(b)-f(a)}_{m\times 1}=\underbrace{\begin{bmatrix}\nabla f_1(c_1)\\ \dots\\ \nabla f_m(c_m)\end{bmatrix}}_{m\times n}.\underbrace{(b-a)}_{n\times 1}$.

- Fórmula de Taylor

$f:D\subseteq\Re^n\to\Re$, f de classe C^{k+1}, numa vizinhança de a que contém a + u, então $f(a+u)=f(a)+f_u'(a)+\dfrac{1}{2!}.f_u''(a)+\ldots+\dfrac{1}{k!}.f_u^k(a)+R$, em que R é o resto.

$R=\dfrac{1}{(k+1)!}.f_u^{k+1}(a+\theta.u)=$ Resto, com $0<\theta<1$ e onde f_u^i é a derivada de ordem i, segundo a direcção do vector u.

Caso $f:\Re^2\to\Re$

$f_u'(a)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\right|_a.u_1+\left.\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\right|_a.u_2$, em que $u_i=(x_i-a_i)$

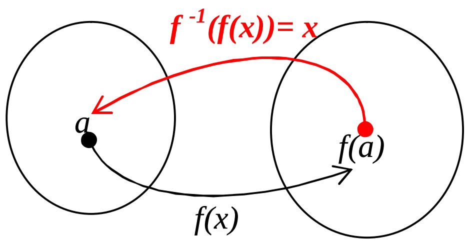
$f_u''(a)=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right|_a.u_1^2+2.\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2}\right|_a.u_1.u_2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}.u_2^2$, em que $u_i=(x_i-a_i)^2$ e $u_1.u_2=(x_1-a_1).(x_2-a_2)$.

4. Teorema da Função Inversa e Teorema da Função Implícita

Teorema da Função Inversa: Seja $f: D \subseteq \Re^n \to \Re^n$ e $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} D$ tais que:

- f é de classe C^1 na vizinhança de a;
- $|J_{f(a)}| \neq 0$

Então, existe uma função f^{-1} de classe C^1 definida na vizinhança de a tal que $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo o x na vizinhança de a.



Se $f: \Re \to \Re$, contínua e de classe C^1 em [a, b] com $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ é uma ***bijecção*** de [a; b] em [α; β] = *f*([*a*,*b*]) e existe $g = f^{-1}$ (e g é C^1) tal que: $g'(f(x)) = \left(f'(x)\right)^{-1}$.

A derivada da função inversa avaliada no ponto *f(x)* é igual ao inverso da derivada da função no ponto *x*.

Uma função ***bijectiva***, correspondência ***biunívoca*** ou ***bijecção***, é uma função ***injectiva*** e ***sobrejectiva***.

Def. (**fc. *sobrejectiva***): Uma aplicação $f: A \to B$ diz-se ***sobrejectiva*** *sse* o seu contradomínio, *f(A)* é igual a *B* (e não a uma parte restrita deste conjunto); de outro modo: *sse* para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Def. (**fc. *injectiva***): Diz-se que $f: A \to B$ é ***injectiva*** *sse*, para quaisquer $x, y \in A$, a condição $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$; o que equivale a dizer que, para cada $y \in B$ existe quando muito um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Teorema da Função Implícita

Se: **a)** $F(x,y)$ com $x \in \Re^n$ e $y \in \Re^n$ for de classe C^1 num domínio aberto $D \subseteq \Re^n \times \Re^m$ com valores em $\Re^m$;

b) $(x_0, y_0) \in D$ for solução de *F(x,y)=0* e

c) $|J^F{}_y|\big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$,

Então existem vizinhanças $V_{(x_0)} \subseteq \Re^n$ e $V(y_0) \subseteq \Re^m$ e uma função $f: V(x_0) \to V(y_0)$ de classe C^1: $f(x_0) = y_0$ e $F(x, f(x)) \equiv 0, \forall x \in V(x_0)$.

Matricialmente, obtemos a seguinte relação: $J_x^f = -\left(J_y^F\right)^{-1} . J_x^F$.

5. Optimização

- Formas Quadráticas

$q = x' \underbrace{A}_{n\times n} x$, A é matriz simétrica (rever conceitos matriciais de Álgebra Linear).

- **Método dos Valores Próprios**

Utilização do **polinómio característico** $\underbrace{|\lambda I - A|}_{Polinómio\ Característico} = 0$

$\forall_i,\ \lambda_i > 0$	Definida Positiva
$\forall_i,\ \lambda_i \geq 0$	S-D Positiva
$\forall_i,\ \lambda_i \leq 0$	S-D Negativa
$\forall_i,\ \lambda_i < 0$	Definida Negativa
$\exists_{i0,\ i1} : \lambda_{i0} > 0 \wedge \lambda_{i1} < 0$	Indefinida.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1).(\lambda - 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow [\lambda = 0 \vee \lambda = 5] \Rightarrow$ **S-D Positiva**.

- **Método dos Menores Principais**

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

- $|A_1| > 0, |A_2| > 0, \dots, |A_n| > 0$ — Definida Positiva
- $|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| > 0, \dots |A_n| > 0$ se n é par; $|A_n| < 0$ se n é ímpar. — Definida Negativa
- $|A_1| > 0, |A_2| < 0$ — Indefinida
- $|A_i| = 0$, então se todos os menores de ordem k[2] forem **não negativos**, será **S-D positiva**; se todos os menores de ordem k tiverem o **mesmo sinal que (-1)^k ou forem nulos** então será **S-D negativa**.

[2] Ver livro "*Cálculo para Economistas*", Cesaltina Pires, secção 6.2.3 "*Formas quadráticas*".

Função Convexa

f definida num convexo S é **convexa** *sse* $f\left(\lambda x + (1-\lambda).x'\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda).f(x')$ e **estritamente convexa** se em **estrita desigualdade**, $\forall \lambda \in (0,1), \forall x, x' \in S$.

(Exemplificar graficamente)

Teorema: Seja f C^2 definida em S convexo. f é convexa *sse* $d_u^2 f$ for semidefinida positiva para todos os pontos do interior do conjunto *S*. Se $d_u^2 f$ for definida positiva, i.e. $d_u^2 f > 0$, seja qual for $u \neq 0$, para todos os pontos do interior de *S*, então a função é estritamente convexa.

Função Quase-Convexa

f(x) definida num convexo *S*, é **quase-convexa** *sse* $\forall x, x' \in S$ e $\forall \lambda \in (0;1)$:

$f(x) \ge f(x') \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)x') \le f(x)$, se em desigualdade estrita, então a função será **estritamente quase-convexa**.
$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \le \min\left\{f(x); f(x')\right\}$

Análise da quase-convexidade / quase-concavidade

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \nabla f \\ \nabla f^T & H \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

i) $\left.\begin{array}{l} |B_1| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} < 0, |B_2| > 0 \\ |B_n| > 0, \text{ se n par} \\ |B_n| < 0, \text{ se n ímpar} \end{array}\right\}$ **Quase-côncava**

ii) $|B_1| < 0, \ldots, |B_n| < 0 \Rightarrow$ **Quase-Convexa**.

- Optimização Livre

- Condições de Primeira Ordem (**CPO**): $\nabla f = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$

Condições Necessárias $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$

Ver **Teorema 7.7** e **Teorema 7.8** ("Condições suficientes para extremos locais") - pg. 169 e 170, "*Cálculo para Economistas*".

H Definida **Positiva** => Mínimo local
H Definida **Negativa** => Máximo local
H **Indefinida** => Ponto de sela

Notas: Nada se conclui quando a forma é semidefinida
Direcção singular: direcção segundo a qual o 2º diferencial é nulo.
Quando efectuamos uma análise local, consideramos **extremo** o ponto que em toda a sua vizinhança se verifique todos os sinais **> 0** (**mínimo**) ou todos **< 0** (**máximo**).

- Optimização Condicionada

Formalização do problema:

$$\underset{\{x_1,x_2\}}{Max/Min}\ f(x_1,x_2)$$

$$s.a \quad g(x_1,x_2)=b$$

$$x_1,x_2 \geq 0 \ \textit{(restrições de não-negatividade)}$$

Lagrangeana

$$L = f(x_1,x_2) + \underbrace{\lambda}_{M.Lagrange}\left[b - g(x_1,x_2)\right]$$

CPO (Condições necessárias):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Condições suficientes (Hessiana orlada):

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial {x_1}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 . \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial {x_2}^2} \end{bmatrix}$$

- ***m***, número de restrições;
- se os menores principais de $\left|\overline{H}\right|$, começando em $\left|\overline{H}_{2m+1}\right|$, forem de sinal $(-1)^m$, o diferencial de 2ª ordem s.a restrições é definido positivo => **Mínimo**.

- se os menores principais de $|\overline{H}|$, começando em $|\overline{H}_{2m+1}|$, forem alternando, sendo o sinal de $|\overline{H}_{2m+1}|$ igual ao de $(-1)^{m+1}$ => **Máximo**.

Nota: interpretação do multiplicador de Lagrange - $\boldsymbol{\lambda}$ - dá a variação do valor da função objectivo no óptimo perante uma alteração do parâmetro ***b*** na restrição.

- Optimização Não-linear

Exemplo:

$$\underset{\{x_1,x_2\}}{Max}\ f(x_1,x_2)$$

$$s.a \qquad g(x_1,x_2)\le b$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \textit{ (condições de não-negatividade)}$$

$$L = f(x_1,x_2)+\lambda\left[b-g(x_1,x_2)\right]$$

- restrições em desigualdade, sendo necessário verificar se no óptimo as restrições são activas ou não.

CPO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = L'_{x_1} \le 0, \quad x \ge 0, \quad L'_{x_1}x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = L'_{x_2} \le 0, y \ge 0, \quad L'_{x_2}x_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = L'_{\lambda} \ge 0, \quad \lambda \ge 0, \quad L'_{\lambda}\lambda = 0 \end{cases}$$

Condições de complementaridade

- Ver **Teorema 9.1 (suficiência das condições K-T)** - pg. 213/ 214, "*Cálculo para Economistas*".

- Ver **Teorema 9.3 (necessidade das condições de K-T)** - pg. 218 "*Cálculo para Economistas*".

- Ver **Teorema 9.4 (necessidade e suficiência) –** pg. 219, 220: Sob determinadas condições, para funções objectivo quase-côncavas e restrições quase-convexas , as condições de K-T para o problema de maximização sujeita a restrições do tipo ≤ são necessárias e suficientes.

6. Séries

Soma dos *n* termos de uma sucessão a_n com *razão r*:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \text{ com } -1 < r < 1.$$

Diz-se que a sucessão a_n é **somável** *sse* for **convergente** (**em R**) a sucessão s_n, das suas somas parciais; nesta hipótese, chama-se soma dos termos da sucessão a_n ao limite de s_n e, designando-o por *s*, pode escrever-se:

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots = s .$$

Na realidade, em vez de se dizer que a sucessão a_n é **somável** é costume dizer-se que a série é **convergente**; quando s_n não converge (em **R**) diz-se que a mesma série é **divergente**.

<u>Teorema da necessidade</u>: Se a série $\sum a_n$ é convergente, a_n é um infinitésimo: $a_n \to 0$.

No entanto o facto de $a_n \to 0$ não implica que a série em causa seja convergente.
Por exemplo, considere a **série harmónica** $\sum \frac{1}{n}$, sendo claro que $1/n \to 0$.
Calculando $s_{2q} - s_q = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{2q} \geq \underbrace{\frac{1}{2q} + \ldots + \frac{1}{2q}}_{q} = \frac{1}{2}$, o que significa que a partir de qualquer ordem, podem obter-se diferenças $s_{2q} - s_q$ superiores a 0,5 o que permite concluir que a **série harmónica é divergente**, apesar de $1/n \to 0$.

<u>Teorema (Critério geral da comparação)</u>: Suponha-se que, para todo, o $n \in N$, se tem $0 \leq a_n \leq b_n$, então

i) se $\sum b_n$ é convergente, $\sum a_n$ é também convergente;

ii) se $\sum a_n$ é divergente, $\sum b_n$ é também divergente.

<u>Teorema (Critério de Leibnitz)</u>: Se a_n é uma sucessão decrescente de termos positivos, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converge *sse* $a_n \to 0$.

Diz-se que a série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** *sse* for convergente a série $\sum |a_n|$; as séries convergente cuja série dos módulos diverge dizem-se **simplesmente convergentes**, **semi-convergentes** ou **condicionalmente convergentes**.